Problem 1

1) 3个 2) 2个 3) 8个

Problem 2

用集合{0, 1, 2}里不同的数标记三个顶点的非同构的标记树有A(3, 3)/2 = 3种

用{0, 1, 2, 3}里不同的数标记四个顶点的非同构的标记树有A(4, 4)/2 + 4 = 16种

Problem 3

a) 当n=1时, 唯一顶点的度数是0, d1 = 2(1-1) = 0, ∑k i=1 di = 2(k-1)成立

假设当n=k时∑k i=1 di = 2(k-1)成立, 即n=k的树中有k-1条边

假设树T有k+1个顶点, 任取T的一个树叶v, w与v邻接

从·T中删除v和连接w和v的边, 得到一个有k个顶点的树T’, T’有k-1条边

所以T中有k-1+1=k条边, ∑k i=1 di = 2(k-1)

综上所述, 若D恰好是某个树T的各个顶点的度数序列, ∑k i=1 di = 2(k-1)

b) 当n=1时, d1 = 2(1-1) = 0, 唯一顶点的度数是0, d1是唯一顶点的度数

假设当n=k时D满足∑k i=1 di = 2(k-1)则D恰好是某个树T顶点的度数序列

假设D满足∑k+1 i=1 di = 2k, 若对任意1≤i≤k+1都有di≥2

∑k i=1 di ≥ 2k, 矛盾, 即正整数序列D中必有取值为1的项

若对任意1≤i≤k+1都有di=1, ∑k i=1 di = k, 矛盾, D中必有取值大于1的项

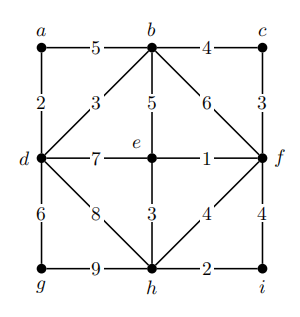
从D中删除一个1, 再任取一个大于1的dm减去1, 得到新的序列D’

对D’有∑k i=1 di = 2(k-1), 则D’恰好是某个树T’的顶点度数序列

在T’中增加一个顶点, 并将它与dm对应的顶点连接, 得到新的树T

则原序列D恰好是T的各个顶点的度数序列

综上所述, 若D满足上式则存在一个树T使得D恰好是T的顶点度数序列



Problem 4

普林算法: (e, f), (c, f), (e, h), (h, i), (b, c), (b, d), (a, d), (d, g)

克鲁斯卡尔算法: (e, f), (h, i), (a, d), (c, f)

(e, h), (b, d), (b, c), (d, g), 可见两种算法结果是相同的

最小生成树的总权值为: 1+2+2+3+3+3+4+6=24

Problem 5

1) 证明: 假设每条边权重均不相同的带权图存在两个最小生成树T1和T2, 则

其边按权重升序排列分别为{e11, e12, …, e1n}和{e21, e22, …, e2n}

存在k使得对于1≤i≤k-1有w(e1i)=w(e2i)且w(e1k)≠w(e2k)

则T1中没有e2k, T2中没有e1k。不妨设w(e1k)<w(e2k), T2+e1k必有环C

已知T1无环, 则C中有除{e21, e22, …, e2n}以外的边

删去任一这样的边，可得到一个更小的生成树，与T2是最小生成树矛盾

因此每条边权重均不相同的带权图有唯一的最小生成树

2) 反驳: a)为最小生成树, 总权值为14, b) c)均为次小生成树, 总权值为15

**3**

**2**

**1**

**10**

**9**

**5**

**4**

**7**

a) b) c)

如图所示, 最小生成树的权值小于该树, 其他生成树的权值均大于该树

可见每条边权重均不相同的带权图不一定有唯一的最小生成树

Problem 6

设图中存在最小生成树T包含G中某个圈上权值最大的边e

在T中删掉e, 得到的T-{e}不连通, 设两个连通为分量V1和V2

在原图G中, C-{e}是一条通路, 通路中有顶点分别属于V1和V2

存在边v的两个顶点分别属于V1和V2, v不在T-{e}中

把v加入到T-{e}中, 得到的新图连通, 形成一棵新树T’, 根据题设有

v的权值小于e, 则T’的总权值小于T, 矛盾, e不在G的任何最小生成树中